République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès Faculté de Génie Éléctrique Département de Télécommunication Département de Éléctronique

Méthodes d'Analyse Numériques: Cours et TDs

Deuxième Année Licence

(Année Universitaire: 2019/2020)

Par Mr. MAHIDDINE ABDERRAHIM
Le: 22/03/2020
Adresse mail: ma2006ne_86@yahoo.fr

Contents

Chapter 1

Programme

1. Les erreurs numériques: introduction générale aux erreurs de calcul et les approximations, erreur absolue, relative,...
2. Résolution de l'équation $f(x) = 0$: introduction sur les méthodes de résolution des équations non linéaires, Méthodes des approximations successives-Méthode de Newton et Newton Raphson, point fixe, bissection (Dichotomie), méthode d'accéliration approximation successive.
3. Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires: introduction générale et définitions, Méthode de Gauss et pivotation, Méthode de factorisation LU, Méthode de factorisation de Choelesky MM^t, Algorithme de Tomas (TDMA) pour les systèmes tri-diagonales.
4. Méthodes itératives: méthode de Gauss-Seidel, Jacobi et méthode de relaxation, méthode des gradients conjugués.
5. Méthode de résolution approximation des systèmes d'équations linéaires: Introduction générale et définitions, Méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel et méthode de relaxation,
6. Interpolation polynomiale: introduction générale, Méthode d'interpolation de Lagrange - Méthode d'interpolation de Newton - Erreur d'interpolation - Les fonctions spline-cubiques
7. Intégration numérique: Introduction générale, Méthode de Newton-cotes, Quadrature de Gauss, Méthode de Gauss (ou Gansc), Méthode de Tchebichev, Méthode d'Euler et Taylor, Méthode d'Euler améliorée, Méthode du Trapèze, Méthode de Simpson, formule de Quadrature.
8. (Résolution des équations différentielles ordinaires (problème de la condition initiale ou de Cauchy)) Equations différentielles à conditions initiales: Introduction générale, Problème de Cauchy, Méthode d'Euler améliorée, Méthode à un pas: Méthode de Rung-Kutta.

Chapter 2

Interpolation polynômiale

2.1 Méthode de Gauss progressive

Soit le triangle de pascal

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\\
1\ 2\ 1\\
1\ 3\ 3\ 1\\
1\ 4\ 6\ 4\ 1\\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1
\end{array}
$$

Et soit le tableau suivant:

$\cdots$	x_{-3}	x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
$\cdots$	f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	$\cdots$

On fait les calculs des différences finies centrales suivantes d'ordre 2 et d'odre 4:

$$S^2 f_0 = f_1 - 2f_0 + f_{-1}$$

$$S^2 f_1 = f_2 - 2f_1 + f_0$$

$$S^2 f_2 = f_3 - 2f_2 + f_1$$

$$S^2(f_1 - f_0) = S^2 f_1 - S^2 f_0$$

$$S^4 f_0 = S^2(S^2 f_0) = S^2(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) = f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}$$

La formule de Gauss est la suivante:

$$P_4(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{1!h}(f_1 - f_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2} S^2 f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})}{3!h^3} S^2(f_1 - f_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})(x - x_2)}{4!h^4} S^4 f_0.$$

2.2 Approximation de degré 2 au sens de moindres carrées de f

Revient à minimiser la quantitie: $A = \sum_i \left(f_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)^2$.

Par rapport aux coefficients a_i. soit $\dfrac{\partial A}{\partial a_0} = \dfrac{\partial A}{\partial a_1} = \dfrac{\partial A}{\partial a_2} = 0$, ce qui donne le système:

$$\begin{pmatrix} \sum_i 1 & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i f_i \\ \sum_i x_i f_i \\ \sum_i x_i^2 f_i \end{pmatrix}$$

Le polynôme d'approximation est : $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Polynômes orthogonaux:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - a_1, \quad P_2(x) = (x - a_1)P_1(x) + b_2 P_0(x) :$$

Sont les polynômes orthogonaux sur les points données x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, $\cdots$ avec la fonction poids 1 si : $\sum_{i,j} P_j(x_i)P_k(x_i) = 0$.

Chapter 3

Résolution d'équations polynômiales

3.1 Exemples de valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Méthode de Krylov
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: une matrice d'ordre n à valeurs dans $\mathbb{R}$: on dit que λ est une valeur propre de A ssi: $\exists V \neq 0 : \quad AV = \lambda V$. Pour la détermination exacte de la valeur λ, on cherche la solution de $\det(A - \lambda I) = 0$. Si on pose: $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda) = \det(A - \lambda I) \end{array}$$

Donc une valeur propre de A est la solution de $f(\lambda) = 0$, alors pour déterminer les valeurs propres en utilisant les méthodes numériques; il suffit d'appliquer les méthodes (Newton, point-fixe, bissection (Dichotomie),...) pour résoudre le problème $f(\lambda) = 0$.
Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, Déterminer par la méthode de Bissection les valeurs propres de A à une erreur de 10^{-2}.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4). \end{array}$$

tel que:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda) \times (2 - \lambda) - (2) \times (1) = (\lambda^2 - 5\lambda + 4).$$

Nous avons la formule $\dfrac{b-a}{2^n} < 10^{-2}$, pour déterminer le nombre d'itération de la recherche du solution λ_1 et λ_2, les a et b sont celles que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_1 = \dfrac{3}{2}$.

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-2} \Longleftrightarrow \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2^n} < 10^{-2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-2} \Longleftrightarrow \log 2^n > \log 10^2 \Longleftrightarrow n \log 2 > 2 \log 10$$

$$\Longleftrightarrow n < \frac{2 \log 10}{\log 2} \Longleftrightarrow n = 7.$$

Où une de ces deux solutions λ_1 *et* $\lambda_2 = x_7 = \dfrac{a_6 + b_6}{2}$, la solution restant parmi λ_1 *ou* λ_2 sera déterminer par la division `Euclidienne` ou schéma de `Horner`,...

Définition:(Matrice Définie Positive)
Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$: on dit que A est une matrice définie positive ssi:

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n \times 1} : \quad {}^tXAX \geq 0.$$

$$^tXAX \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i\,j} \right) x_j \geq 0.$$

Exemple: Soit la matrice carée $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons qu'elle est définie positive?

$$^tXAX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$^tXAX = (x-4y+z)x+(2x+y-2z)y+(-x+2y)z = x^2-4xy+zx+2xy+y^2-2yz-xz+2yz = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geq 0,$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n\times 1}.$$

D'où A est définie positive.

Exercice 1. Soit la matrice carée $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, Déterminer a pour que A soit définie positive.

Exercice 2. Résoudre le système $AX = b$, par la méthode de Gauss:

$$AX = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & -3.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1.5 \\ -6.5 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1.5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. En considérant un pas $\Delta x = 0.1$, calculer par schéma de différences finies:

- (a) en avant.
- (b) en arrière.

Et centrer la dérivée prmière de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x_i = 2$. Calculer l'erreur de troncation pour chaque cas.

Exercice 4. Écrire un algorithme qui interpole la fonction racine carrée dans le corps $\mathcal{Z}$ par la méthode de Lagrange et l'erreur si c'est possible.

Solution d'Exercice 4. On a $x_i = 2$; $\Delta x = 0.1$ et $f(x_i) = x_i^2$. $x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2.1$ et $x_{i+1} = x_i - \Delta x = 1.9$, $f_i = f(2) = 4$, $f_{i+1} = f(2.1) = 4.41$ et $f_{i-1} = f(1.9) = 3.61$, $f^{''}(x) = 2$.

a) Différence premières en avant:

$f_i^{'} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = 4.1$, $O(h) = \dfrac{-\Delta x}{2} f^{''}(\xi) = -0.1$

b) Différence en arrière:

$f_i^{'} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = 3.9$, $O(h) = \dfrac{\Delta x}{2} f^{''}(\xi) = 0.1$

c) Différence centrées:

$f_i^{'} = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = 4$, $O(h^2) = \dfrac{\Delta x^2}{6} f^{(3)}(\xi) = 0$

Chapter 4

Intégration Numérique

4.1 Introduction

Dans la pluspart des intégrales qu'on rencontre il n'est pas possible d'exprimer une primitive à l'aide des fonctions usuelles. On se propose de chercher une approximation numérique de cette intégrale.
$I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$; f est une fonction définie sur $[a,\ b]$. On approche I par $I_{app} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) + R$, où les coefficients α_i sont choisis de telle sorte que R soit nul lorsque f est d'un type déterminée. Pour f quelconque on appellera la formule suivante:

$$I_{app} \simeq A_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \ et \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = I \qquad (1)$$

formule de quadrature et dans ce cas A_n sera valeur approchée de I si $R \ll petit$.

Théorême: Lorsque f est continue sur $[a,\ b]$, nous avons (1) si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. (1) est vraie pour tout polynôme P.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i)$ est bornée pour tout n.

Une formule d'intégration exacte:
Pour toute fonction polynôme P de degré au plus 3, on a:

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{b-a}{6}\left[P(b) + P\left(\frac{a+b}{2}\right) + P(b)\right].$$

La formule est vraie pour:

$$P(t) = \begin{cases} cst; & \\ x,\ x^2,\ x^3; & \text{monômes} \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & \text{polynômes.} \end{cases}$$

Si on approche f par P cette formule donne approximativement la valeur de l'intégrale de f.

Formules de quadrature de Newton-Côtes:
On suppose que les x_i sont équidistants $(x_{i+1 x i} = h = cst)$ et $x_0 = A$ alors $x_i = x_{i-1} + h = a + ih$ pour $i = 1, \cdots, n$. Dans ce cas: $h = \dfrac{b-a}{n}$.
En interpolant f par des polynômes de degrée m par morceaux, on obtient les formules de quadrature de Newton-Côtes suivantes:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)\sum_{i=0}^{m} H_i f(x_i) \qquad (2)$$

Où

$$H_i = \frac{(-i)^{m-i}}{i!(m-i)!m}\int_0^m \frac{q^{[m+1]}}{q-i}dq$$

et $q^{[m+1]} = q(q-1)(q-2)(q-3)\cdots(q-m)$, appelé puissance généralisée.

4.1.1 Méthode de Trapèzes:

En interpolant f par un polynôme de degrée 1 sur le sous-intervalle $[x_0,\ x_1]$ (on remplace m par 1 dans (2)) on peut écrire que :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left(H_0 y_0 + H_1 y_1\right) \ \ avec\ \ H_0 = H_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right).$$

De la même manière nous pouvons écrire:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(y_i + y_{i+1}\right),\ pour\ tout\ i = 0, \cdots, n-1.$$

Comme $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, alors la formule de Trapèzes est :

$$I = \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right] + R_T.$$

Où R_T: l'erreur commise par cette méthode vérifiant:

$$R_T = \left|-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\right|,\ \xi \in]a,\ b[.$$

$$R_T \leq \frac{nh^3}{12} \max_{a\leq x\leq b}\left|f''(x)\right|.$$

Dans ce cas l'erreur est d'ordre 2 en h.

4.1.2 Méthode de Simpson (pour $n = 2p$):

En interpolant f par un polynôme de degrée 2 sur le sous-intervalle $[x_0,\ x_2]$ (on remplace m par 2 dans l'équation (2)) on peut écrire que :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq 2h\left(H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2\right) \ \ avec\ \ H_0 = H_2 = \frac{1}{6}\ et\ H_1 = \frac{2}{3}.$$

Donc

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

De la même manière nous pouvons écrire:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\right),\ pour\ tout\ i = 0, \cdots, \frac{n}{2} - 1.$$

En sommant nous obtiendrons pour $n = 2p$: Comme $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$, alors la formule de Simpson est :

Comme $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$, alors la formule de Simpson est :

$$I \simeq \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}\right) + y_n\right).$$

On pose:

$$\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}\ et\ \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}.$$

Alors

$$I \simeq \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_n\right) + R_S.$$

Où R_S: l'erreur commise par cette méthode vérifiant:

$$R_S \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(b-a)h^5}{180} \max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(4)}(x)\right| \ldots\ldots..$$

Et dans ce cas, on dit que l'erreur de la formule de simpson est d'ordre 4 en h.

Méthode de Simpson:

Soit f définie sur $[a,\ b]$ et soit $m = \frac{a+b}{2}$ le milieu de $[a,\ b]$. On approche f par son polynôme d'interpolation P en a, m et b. Comme ce polynôme est de degré au plus 2, son intégrale sur $[a,\ b]$ est donnée par la formule exacte ci-dessus. Or P prend les mêmes valeurs que f en a, $\frac{a+b}{2}$ et b, donc on a la formule d'intégration approchée:

$$\int_a^b f(t)dt \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right].$$

L'erreur d'intégration de la méthode de Simpson:

Si f possède une dérivée quatrième continue, alors en posant $M = \max_{x\in[a,\ b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$, on a:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}M.$$

Formule de Simpson généralisée:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right].$$

Formule de Trapèzes généralisée:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right].$$

Formule de Quadrature de Gauss:

Définition: On appele "Polynômes de Legendre" les expressions de la forme:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad n \geq 0.$$

Les propriétés fondamentales de ces polynômes:

1. $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, pour tout $n \geq 0$.
2. deg $P_n = n$, pour tout $n \geq 0$.
3. $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 0,\ k < 0 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0,\ \textit{pour tout } m \neq n.$
   On dit dans ce cas que ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $w(x) = 1$ (ie: $\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = k_n\delta_{mn}$).
4. Le polynôme de Legendre $P_n(x)$ possède n racines distincts et réelles comprise entre $[-1,\ 1]$.

On cite ci-dessous les 5 premiers polynômes:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \end{cases}$$

Considérons d'abord que la fonction $y = f(t)$ est définie sur $[-1,\ 1]$. Le problème est de trouver une formule de quadrature; ie: $A_i = ?$ et $t_i = ?$

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \simeq \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

qui soit exacte pour tout polynômes dont le degré est le plus grand possible avec

$$\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k = \int_{-1}^{1} t^k dt = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & \text{k pair;} \\ 0, & \text{k impair.} \end{cases}$$

$k = 0, \cdots, n-1$ où les t_i sont les zéros du polynôme de Legendre de degré n.

La formule obtenue ainsi, est appelée "Formule de quadrature de Gauss" à "n coordonnées".
Pour f définie sur un intervalle quelconque $[a,\ b]$, on considère le changement de variable suivant:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}, \quad \textit{pour tout } t \in [-1,\ 1],$$

qui transforme l'intervalle $[-1,\ 1]$ à $[a,\ b]$. Donc on peut écrire que la formule de quadrature de Gauss à n coordonnées sur $[a,\ b]$ est donnée par :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i).$$

Où $x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{b+a}{2}$, pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Chapter 5

Exercices Et Quelques Solutions

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2019/2020**
Faculté de Génies Élèctrique **2ième Année G.E**
Départements de TLC et ELN **Par: Mr.MAHIDDINE A.R**

Erreurs et Zéros d'Équations Non Linéaires **TD-01: Méthodes d'Analyse Numériques**

Exercice 1.

1. Donner le nombre de c.s.e des nombres $0,1234$ et $9,8765$, s'il ont une erreur relative inférieur à 10^{-3}.
2. Si tous les chiffres significatifs de $202,00301$ sont exacts. Quelle est son erreur relative?
3. Si tous les chiffres significatifs de $144,00707$ et $2,0200301$ sont exacts. Quelle est l'erreur absolue (resp. relative) de la somme? Combien de c.s.e a t-elle?
4. Calculer $\frac{73,5}{0,0013}$ si tous les chiffres significatifs du numérateur et du dénominateur sont exacts. Quelle est l'erreur relative (resp. absolue) du rapport? Arrondir au dernier c.s.e.

Exercice 2. Séparer par la régle des signes de Descartes les racines de ces polynômes:

$$P_1(x) = 3x^7 + 6x^5 - x^4 - 23x^3 + 11,\ P_2(x) = 7x^5 + 4x^3 - 4x^2 + x + 5,\ P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16.$$

$$P_4(x) = -x^3 + 13x^2 - 39x + 27,\quad P_5(x) = -x^3 + 8x^2 - 17x + 10.$$

Exercice 3. Utiliser la règle des signes de Descartes et le schéma de HORNER pour ces deux équations:

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0;\quad x^3 - x^2 - 126x + 360 = 0.$$

Exercice 4. Soit le polynôme $P_3(x) = -x^3 + 13x^2 - 39x + 27$. À l'aide du théorème de Sturm, montrer que les racines de $P_3(x)$ sont toutes réelles.

Exercice 5. On définit le polynôme: $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

1. Localiser les racines dans des intervalles dans $\mathbb{R}$ deux à deux disjointes.
2. Donner une approximation par la méthode de Dichotomie (bissection) à 10^{-2} près de ces racines le plus petit modulé.

Exercice 6. On considère le polynôme $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$. Montrer, en utilisant le théorème de Sturm, que $P_3(x)$ admet trois racines réelles compris entre -10 et $+10$.

1. Calculer la première racine par la methode de Newton en partant de $x_0 = -2$.
2. Calculer la deuxième racine par la methode de point-fixe.
3. Déduire la troisième racine en utilisant le schéma de Horner.

Exercice 7. Appliquer le principe d'accélération de la convergence de la méthode de *Point-fixe* à la fonction: $f(x) = x^3 - 3x + 1$: Déterminer la première solution α_1 par la méthode de *Point-fixe*, la deuxième solution α_2 par la méthode de *Bisection*, déduire la troisième solution α_3 en utilisant le schéma de `Horner`. On donne $\alpha_1 \in]-2,\ -1[$, $\alpha_2 \in]0,\ 1[$ et $\alpha_3 \in]1,\ 2[$.

Exercice 8. On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - 6$ dans l'intervalle $]0, 4[$.

1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans l'intervalle $]0, 4[$ et trouver α de façon analytique.
2. Peut-on appliquer la méthode de Dichotomie pour calculer α? Justifier.
3. Pour approcher le zéro α on considère les méthodes de point fixe

$$x_{k+1} = \varphi_i(x_k),\ i = 1, 2, 3,\ avec:\ \varphi_1 = x + 4e^{\frac{x}{4}} - 6;\ \varphi_2 = x - 4 + 6e^{\frac{-x}{4}};\ \varphi_3 = x - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{16} + \frac{3}{32}.$$

Établir si les trois méthodes sont convergentes?

4. Pour la méthode de fonction $\varphi_3 = x - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{16} + \frac{3}{32}$, Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-6}, lorsqu'on a choisi $x_{(0)}$ tel que: $|x_{(0)} - \alpha| < 2$.

Université D.L de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Génies Électrique
Départements de TLC et ELN

Année : 2019/2020
2ième Année G.E
Par: Mr.MAHIDDINE A.R

TD-02: Méthodes d'Analyse Numériques **Sur L'interpolation Polynômiale**

Exercice 1.

1. Soit f une fonction connue aux points $x_0 = -4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$ par: $f(-4) = 256$, $f(-2) = 16$, $f(0) = 0$, $f(2) = 16$, $f(4) = 256$. Trouver le polynôme d'interpolation par la méthode de Newton, et estimer la valeur de f au point $x_5 = 6$.

2. Soit $f(x) = \cos x$; estimer par la méthode de Lagrange la valeur de $\cos(\pi/32)$ avec:

x	0	$\pi/16$	$\pi/8$	$\cos(\pi/32)$
$f(x)$	1	$\cos(\pi/16)$	$\cos(\pi/8)$	$\cdots$

Exercice 2. On considère la fonction $e^{-\frac{x}{10}}$ Définie sur l'intervalle $[0, 3]$ par la table de valeurs:

x	0	1	2	3
f(x)	1	0,904837	0,818730	0,740818

1. Calculer à l'aide de la méthode d'interpolation de Lagrange, la valeur $f(1, 5)$.

2. Calculer l'erreur d'interpolation.

Exercice 3. Soit $f(x) = \cos(\pi x)$, $x \in [-1, +1]$ et $P(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 sur $[-1, +1]$.

1. Appliquer l'algorithme de Newton pour calculer $P(x)$. En déduire l'expression de $P(x)$.

2. Estimer l'erreur d'interpolation en $x = 0$ et comparer avec l'erreur exacte.

Exercice 4. Déterminer, par la méthode de Lagrange et la méthode de Newton, le polynôme d'interpolation, de degrée inférieur ou égal à 3, de la fonction passant par les points:

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
f(x)	-160	-96	-64	-45	-16	96	320

Exercice 5. Soit $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$, où x est en `Radians`.

- (a). Déterminer le polynôme de `Lagrange` de degré 2 qui interpole la fonction $f(x)$ en $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et $x_2 = \pi$.
- (b). Estimer la valeur de $f(\dfrac{\pi}{4})$ en utilisant le polynôme trouvé en (a).
- (c). Donner une borne supérieure de l'erreur comise en (b).

Exercice 6. On considère la fonction f telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(3) = 2$. Il existe un polynôme $P_2(x)$ tel que $f(0) = P_2(0)$, $f(1) = P_2(1)$ et $f(3) = P_2(3)$. Déterminer ce polynôme par la méthode de Lagrange et par la méthode de Newton.

Exercice 7. On considère la fonction f telle que $f(-3) = 81$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(3) = 81$. Il existe un polynôme $P_4(x)$ tel que $f(x) = P_4(x)$. Déterminer ce polynôme par la méthode de Lagrange et par la méthode de Newton.

Université D.L de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Génies Élèctrique
Départements de TLC et ELN

Année : 2019/2020
2ième Année G.E
Le: 05-04-2020

Intégration numérique et Résolution des équations différentielles RK2-RK4 **TD-03**

Exercice 1. Soit f la fonction définie par le tableau:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	17	4	3	8	61

1. Donner la table des différences divisées de f et en déduire le polynôme d'interpolation de degré 4 de f par la méthode de Newton.
2. Calculer $\int_{-2}^{+2} f(x)dx$ par la méthode des trapèzes généralisée et puis par la méthode de Simpson généralisée.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ par la méthode des Trapèzes et par la méthode de Simpson, telle que $f(x) = e^{-\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = e^{-x+10}$, $x_0 = a = 0$ et $x_7 = b = 7$.

Exercice 3. Calculer par les deux méthodes: Simpson et trapèzes, les intégrales:

$$I_1 = \int_0^5 x^2\sqrt{x^3+1}dx \quad et \quad I_2 = \int_0^5 (x^2 + \sqrt{x})dx.$$

Exercice 4. Approximer l'intégrale: $I = \displaystyle\int_0^7 \frac{dx}{1+3x+3x^2+x^3}$, par deux méthodes avec $n = 7$.

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle : $y' = -\frac{y}{x+1}$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 si $y(0) = 1$ *et* $x \in [0,\ 1.25]$ avec un pas de discrétisation $h = 0.25$. Déduire les valeurs de : $y'(0.25)$, $y'(0.5)$, $y'(0.75)$, $y'(1)$, $y'(1.25)$. Calculer $\int_0^{1.25} y'(x)dx$ par la méthode de Simpson généralisée.

Exercice 6. On considère le problème de Cauchy : $y' = (x+1)^3 + \frac{2y}{x+1}$ avec $y(0) = \frac{3}{2}$, $x \in [0.0,\ 0.4]$ *et* $h = 0.01$. Déterminer les valeurs de y_n de y aux points $x_n = nh,\ n = 0, \cdots, 4$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Calculer $\int_0^{0.04} y(x)dx$ par la méthode des trapèzes généralisée.

Exercice 7. Calculer les valeurs approchées de la solution de l'equation differentièlle $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, avec la condition initiale $y(0) = y_0 = 1$ aux point $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.4$ d'aprés la méthode de RK-2 et RK-4, effectuer les calculs à 4 décimales exactes. Estimer le résultat obtenu si la solution est $y = \sqrt{2x+1}$.

Exercice 8. Utiliser la méthode R.K.4 pour calculer les deux premières valeurs de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle: $y^{'} = \dfrac{y-t}{y+t}$, en prenant le pas $h = 0.25$.

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2019/2020**
Faculté de Génies Élèctrique **2ième Année G.E**
Départements de TLC et ELN **Par: Mr.MAHIDDINE A.R**

Résolution des systèmes linéaires (Directe) **TD-04: Méthodes d'Analyse Numériques**

Exercice 1. Soient les matrices et les vecteurs suivantes:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix};\ {}^tb = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 \end{pmatrix};\ f = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix};\ j = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice C est définie positive.
2. Inverser par la méthode de Gauss-Jordan la matrice C.
3. Résoudre par la méthode de Choleski le système $CX = b$.
4. Résoudre par la méthode de Gauss et Gauss-Jordan le système $EX = f$.
5. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice C, par la méthode de Krylov.
6. Résoudre le système $Cx = j$ par la méthode de Gauss-Seidel. On partira du vecteur: ${}^tx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur b définie par $b = \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 34 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A.
2. Peut-on résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky? Si c'est le cas déterminer X.
3. Inverser la matrice A par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 3. Soit la matrice A et le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est définie positive. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Trouver la décomposition LU de la matrice A, résoudre alors le système $Ax = b$.
3. Inverser la matrice A par la méthode de Gauss-Jordan.
4. Trouver la décomposition $A = B^tB$, résoudre alors le système $Ax = b$ par la méthode de Cholesky.

Exercice 4.

1. On considère la matrice: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
   - a) Déterminer le polynôme caractéristique $P_3(x)$ de la matrice A par la méthode de Krylov.
   - b) Montrer à l'aide du théorème de Sturm que toutes les racines de ce polynôme sont réelles puis,
   - c) Calculer une des racines de $P_3(x)$ à l'aide de la méthode du point fixe. On partira de $x_0 = 0.5$.
   - d) Calculer une des racines de $P_3(x)$ par la méthode de Newton. On partira de $x_0 = 10$.
2. On considère le vecteur: ${}^tb = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
   - a) Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss.

- b) Inverser la matrice A par par la méthode de Gauss-Jordan.
- c) Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Seidel. On partira du vecteur: $x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 1.8 & 3 \end{pmatrix}$.

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2019/2020**
Faculté de Génies Élèctrique **2ième Année G.E**
Départements de TLC et ELN **Par: Mr.MAHIDDINE A.R**

Résolution des systèmes linéaires (Indirecte) **TD-05: Méthodes d'Analyse Numériques**

Exercice 1. On considère la matrice A et le vecteur b: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant la formule de Cramer résoudre le système $Ax = b$.
2. En utilisant la méthode de Krylov, déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices L et U sont triangulaire inférieure et supérieure respectivement. En déduire A^{-1}. Retrouver A^{-1} par par la méthode de Gauss-Jordan.
4. Montrer que A est symétrique, définie positive. Résoudre alors $Ax = b$ par la méthode de Choleski.
5. Résoudre $Ax = b$, avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$ et $X^{(0)} =^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par la méthode de Jacobi.
6. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Seidel. On prendra le même vecteur initial qu'à la question précédente et avec la même précision.

Exercice 2. Soit le système linéaire: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 4 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a). Vérifier s'il y'a convergence de processus.
- b). Dans le cas positif, combien d'itérations faut-il réaliser pour trouver la solution à 3 décimales avec une erreur $\epsilon = 0.5 \times 10^{-3}$.
- c). En considérant comme vecteur initial $X^0 = \begin{pmatrix} 3.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}^t$, résoudre le système par: La méthode des approximations succssives, (faire 3 itérations). Et par La méthode de Seidel (faire 2 itérations).

Exercice 3. Soit le système linéaire suivant: $AX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$

1. Calculer le déterminant et les valeurs propres de la matrice A.
2. Trouver A^{-1} par la méthode de `Crout`, en déduire la solution X.
3. Comparer cette solution X avec $X^{(3)}$ de `Seidel` à partir de $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Exercice 4. Soit les systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10. \\ x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 13. \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases} \qquad et \qquad \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 2. \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2. \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

1. Résoudre le système par l'une des méthode: `Gauss` ou ${}^tRR$.
2. Donner une condition nécessaire et suffissante de convergence de la méthode de Gauss-Seidel. Est-ce-qu'elle est satisfaite?
3. Résoudre par la méthode de Gauss-Seidel avec une précision de 10^{-1}: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour déterminer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$.

Exercice 5. On considère la suite (X_n) de matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie comme suit:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad connu \ et \ \forall n \in \mathbb{N}; \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 4z_n, \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + 12z_n, \\ z_{n+1} = x_n - 2y_n + 5z_n. \end{cases}$$

- a). Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
- b). En déduire l'écriture de X_n en fonction de n et X_0, par utilisation de 3.2(Gauss-ou-Seidel-ou-Jordan).

Le: 19-04-2020 ··························· *Page* (1/1) ··························· **Bon courage**

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2019/2020**
Faculté de Génie Éléctrique **2ième année Licence**
Départements de: TLC et ELN **Par: Mr.Mahiddine A/R**
Module: Méthodes Numériques **Fiche de TD N 01**

Exercices Sur Les Erreurs et sur Les Zéros d'Équations Non Linéaires

---

Exercice 1.

1. Arrondir à deux (02), puis à trois (03) chiffres significatifs les nombres suivantes:

   i=0,8979 j=0,0942 k=13,37552 x=132,23051 y=0,0057 z=12,35556.

2. Arrondir: $m = 3,7565500$ à cinq (05) chiffres significatifs.
3. Donner le nombre de c.s.e des nombres $0,1234$ et $9,8765$, s'il ont une erreur relative inférieur à 10^{-3}.
4. Si tous les chiffres significatifs de $201,80204$ sont exacts. Quelle est son erreur relative?
5. Si tous les chiffres significatifs de $143,8041$ et $2,018027$ sont exacts. Quelle est l'erreur absolue (resp. relative) de la somme? Combien de c.s.e a t-elle?

Exercice 2. Séparer par la régle des signes de Descartes les racines de ces polynômes:

$$P_1(x) = x^6 - x^4 - 23x^3 + 11,\ P_2(x) = 5x^5 + 3x^2 - 2x + 1,\ P_3(x) = 7x^5 + 4x^3 - 4x^2 + x + 5.$$

Exercice 3. On considère les polynômes:

$$P_1(x) = 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24,\quad P_2(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16.$$

Appliquer la règle des signes de Descartes à ce polynôme, Séparer les racines de ce polynôme à l'aide du théorème de Sturm.

Exercice 4. On définit le polynôme: $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

1. Localiser les racines dans des intervalles dans $\mathbb{R}$ deux à deux disjointes.
2. Donner une approximation par la méthode de Dichotomie (bissection) à 10^{-2} près de ces racines le plus petit modulé.

Exercice 5. On considère le polynôme $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$. Montrer, en utilisant le théorème de Sturm, que $P_3(x)$ admet trois racines réelles compris entre -10 et $+10$.

1. Calculer la première racine par la methode de Newton en partant de $x_0 = -2$.
2. Calculer la deuxième racine par la methode de point-fixe.
3. Déduire la troisième racine en utilisant le schéma de Horner.

Exercice 6. On considère le polynôme: $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Séparer à l'aide du théorème de Sturm les racines de ce polynôme et en déduire l'existence d'une racine multiple. Déterminer cette racine par la méthode de Newton en partant de la valeure initiale $x_0 = 1$.

. . . .

Bon courage

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année Universitaire : 2019/2020**
Faculté de Génie Éléctrique **2ième année Licence**
Départements de: TLC et ELN **Module: Méthodes d'Analyse Numériques**

Solution de la fiche de TD N 01

Solution d'exercice 1.

Nombre avant l'arrondissement	*Arrondissement 2 c.s.e*	*Arrondissement 3 c.s.e*
$i^\star = 0,8979$	$i^\star = 0.90$ car $7 > 5$.	$i^\star = 0.898$ car $9 > 5$.
$j^\star = 0,0942$	$j^\star = 0.09$ car $4 < 5$.	$j^\star = 0.094$ car $2 < 5$.
$k^\star = 13,37552$	$h^\star = 13.38$ car 7 est impaire.	$h^\star = 13.376$ car 5 est impaire.
$x^\star = 132,23051$	$x^\star = 132.23$ car $0 < 5$.	$x^\star = 132.231$ car 5 est impaire.
$y^\star = 0,0057$	$y^\star = 0$.	$y^\star = 0.006$ car $7 > 5$.
$z^\star = 12,35556$	$z^\star = 12.36$ car 5 est impaire.	$z^\star = 12.356$ car 5 est impaire.

$m = 3.7565500$ implique que $m^\star = 3.7566$ car tous les chiffres rejetées sont des zéros et le 5^{ime} chiffre étant impaire.

L'erreur relative $E_r = \dfrac{\Delta x}{\mid x \mid} = \dfrac{\mid x - x^\star \mid}{\mid x \mid} \leq 0.5 \times 10^{-n}$.

$$E_r = \frac{\mid 0.1234 - x^\star \mid}{\mid 0.1234 \mid} \leq 10^{-3} \Longleftrightarrow \mid 0.1234 - x^\star \mid \leq 0.1234 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}.$$

Ça implique que trois chiffres après la virgule sont exactes au moins, $Nombre\, de\, (c.s.e)_{0.1234} = 3$ et sont: 1, 2, 3.

$$E_r = \frac{\mid 9.8765 - x^\star \mid}{\mid 9.8765 \mid} \leq 10^{-3} \Longleftrightarrow \mid 9.8765 - x^\star \mid \leq 9.8765 \times 10^{-3} \leq 0.98765 \times 10^{-4} \leq 0.098765 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}.$$

Ça implique que 9.8765 possède au moins quatre chiffres, et sont : 9, 8, 7 et 6.
Si tous les chiffres significatifs de 201.80204 sont exacts, alors le majorant de l'erreur absolu soit $\Delta x \leq 0.5 \times 10^{-8}$, et par conséquence, le majorant de l'erreur relative soit:

$$E_r = \frac{\mid 201.80204 - x^\star \mid}{\mid 201.80204 \mid} \leq 10^{-8} \Longleftrightarrow \mid 201.80204 - x^\star \mid \leq 201.80204 \times 10^{-8} \leq 5 \times 10^{-5}.$$

$$x = 143.6049 \Longrightarrow \Delta x = \mid x - x^\star \mid \leq 0.5 \times 10^{-4}.$$

$$y = 2.015028 \Longrightarrow \Delta y = \mid y - y^\star \mid \leq 0.5 \times 10^{-6}.$$

$$\Delta(x+y) = 0.5 \times 10^{-4} + 0.5 \times 10^{-6} = (0.005 + 0.5) \times 10^{-6} = 0.505 \times 10^{-6} \leq 0.0505 \times 10^{-7}.$$

Ça implique que $(x + y)$ possède au moins sept chiffres significatifs exactes.

$$\delta(x+y) \leq \max(\delta_x, \delta_y) = \max\left(\frac{0.5 \times 10^{-4}}{143.6049}, \frac{0.5 \times 10^{-6}}{2.0150280}\right).$$

$$\delta(x+y) \leq \max\left(3.481775 \times 10^{-7};\ 2.481355 \times 10^{-7}\right).$$

$$\delta(x+y) \leq \max 3.481775 \times 10^{-7}.$$

$$\delta(x+y) \leq \max 0.3481775 \times 10^{-8}.$$

Solution d'exercice 2.
Séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_6(x) = x^6 - x^4 - 23x^3 + 11.$$

$$(+1)(-1)(-23)(+11)$$

$$(+)(-)(-)(+)$$

Deux changement de signes alors il existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_6(-x) = x^6 - x^4 + 23x^3 + 11.$$

$$(+1)(-1)(+23)(+11)$$

$$(+)(-)(+)(+)$$

Deux changement de signes alors il existent deux racines négatives.
Le polynôme $P_6(x)$ admet normalement 6 racines or on a trouvé que deux positives et deux négatives, en déduit qu'ils existent parmis ces quatre racines quelques racines d'ordre de multiplicité supèrieur strictement à 1 (racines qui ne sont pas simples).
De même manière pour

$$P_5(x) = 5x^5 + 3x^2 - 2x^2 + 1. \quad et \quad P_5(x) = 7x^5 + 4x^3 - 4x^2 + x + 5.$$

Le polynôme $P_5(x)$ admet normalement 5 racines or on a trouvé que deux positives et une négative, en déduit qu'ils existent parmis ces trois racines quelques racines ont un ordre de multiplicité supèrieur strictement à 1 (racines qui ne sont pas simples).

Solution d'exercice 3.
Soit le polynôme $P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16.$$

$$(+1)(-4)(-4)(+16)$$

$$(+)(-)(-)(+)$$

Deux changement de signes alors ils existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_6(-x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 16.$$

$$(-1)(-4)(+4)(+16)$$

$$(-)(-)(+)(+)$$

Un changement de signes alors il existe une racine négative.
On applique le théorème de `STURM` pour séparer les racines (chaque racine dans un intervalle approprie): pour cela on détermine la suite de `STURM`:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(x) &= \mathrm{P}_3(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16. \\
\mathrm{S}_1(x) &= \mathrm{P}'_3(x) = 3x^2 - 8x - 4. \\
\mathrm{S}_2(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = 7x - 16. \\
\mathrm{S}_3(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = 1.
\end{aligned}$$

En prennant les signes de cette suite pour les valeurs: $-\infty$, -1, 0, $+1$, $+\infty$, on peut dresser le tableau suivant:

x	$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	*nombre de changement de signes*
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	$+$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Puisque $N(-\infty) - N(+\infty) = 3 - 0 = 3$; toutes les racines sont réelles. L'une d'entre elles est négative et inférieure à -1; car $N(-\infty) - N(-1) = 3 - 2 = 1$, les deux autres racines sont supèrieures à 1; car $N(1) - N(+\infty) = 2 - 0 = 2$.
De même pour le polynôme $P_3(x) = 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24$, séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_3(x) = 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24.$$

$$(+4)(-8)(-20)(+24)$$

$$(+)(-)(-)(+)$$

Deux changement de signes alors ils existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_3(-x) = -4x^3 - 8x^2 + 20x + 24.$$

$$(-4)(-8)(+20)(+24)$$

$$(-)(-)(+)(+)$$

Un changement de signes alors il existe une racine négative.
On applique le théorème de `STURM` pour séparer les racines (chaque racine dans un intervalle approprie): pour cela on détermine la suite de `STURM`:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(x) &= \mathrm{P}_3(x) = 4x^3 - 8x^2 - 20x + 24 = 4 \times (x^3 - 2x^2 - 5x + 6).\\
\mathrm{S}_1(x) &= \mathrm{P}_3^{'}(x) = 12x^2 - 16x - 20 = 4 \times (3x^2 - 4x - 5).\\
\mathrm{S}_2(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = \frac{38}{9}x - \frac{44}{9}.\\
\mathrm{S}_3(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = \frac{8100}{1444}.
\end{aligned}$$

En prennant les signes de cette suite pour les valeurs: $-\infty,\ -7,\ -3,\ 0,\ +3,\ +7,\ +\infty$, on peut dresser le tableau suivant:

x	$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	*nombre de changement de signes*
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-7	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
$+3$	*sans signe*	$+$	$+$	$+$	0
$+7$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Puisque $N(-\infty) - N(+\infty) = 3 - 0 = 3$; toutes les racines sont réelles. L'une d'entre elles est négative et supèrieure à -3; car $N(-3) - N(0) = 3 - 2 = 1$, les deux autres racines sont infèrieures à 3; car $N(0) - N(+3) = 2 - 0 = 2$. on remarque que $N(-\infty) - N(-7) = N(-\infty) - N(-3) = N(-7) - N(-3) = 0$ alors pas de racines dans ces intervalles.

Solution d'exercice 4.

Séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

$$(+1)(+3)(-9)(+1)$$

$$(+)(+)(-)(+)$$

Deux changement de signes alors il existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_3(-x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1.$$
$$(-1)(+3)(+9)(+1)$$
$$(-)(+)(+)(+)$$

Un seul changement de signes alors il existe une racine négative.
Soit le polynôme $P_3(x) = x^3+3x^2-9x+1$, ce polynôme admet trois solutions $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ dans l'intervalle $]-T,\ T[$ avec $T = 1 + \frac{1}{\mid a_0 \mid} \max(\mid a_1 \mid,\ \mid a_2 \mid,\ \mid a_3 \mid)$ tels que:
$a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -9,\ a_3 = 1$ les coefficients de ce polynôme.

$$T = 1 + \frac{1}{\mid +1 \mid} \max(\mid +3 \mid,\ \mid -9 \mid,\ \mid +1 \mid) = 10$$
$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in]-10,\ +10[.$$

On applique le théorème de `STURM` pour séparer les racines (chaque racine dans un intervalle approprie): pour cela on construit la suite de `STURM`:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{S}_0(x) &=& \mathrm{P}_3(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1. \\ \mathrm{S}_1(x) &=& \mathrm{P}_3'(x) = 3x^2 + 6x - 9. \\ \mathrm{S}_2(x) &=& \text{-Rest}\left(\dfrac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = 8x - 4. \\ \mathrm{S}_3(x) &=& \text{-Rest}\left(\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = \dfrac{21}{4}. \end{array}$$

En prennant les signes de cette suite pour les valeurs: $(-\infty,\ -10,\ -5,\ -4,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 10,\ +\infty)$, on peut dresser le tableau suivant:

x	$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	*nombre de changement de signes*
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-10	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-5	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-4	$+$	$+$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
0.5	$-$	$-$	*sans signe*	$+$	1
1	$-$	*sans signe*	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0
10	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Pas de racines dans les intervalles $]-\infty,\ -10[,\ ]-10,\ -5[,\ ]-4,\ 0[,\ ]0.5,\ 1[,\ ]2,\ 10[$.
car $(3-3) = (2-2) = (1-1) = (0-0) = 0$.
(un racine) appartient à $]-5,\ -4[$ car $N(-5) - N(-4) = 3 - 2 = 1$;
(un racine) appartient à $]0,\ 0.5[$ car $N(0) - N(0.5) = 2 - 1 = 1$;
(un racine) appartient à $]1,\ 2[$ car $N(1) - N(2) = 1 - 0 = 0$.

$$(\alpha_1 \in [0,\ 0.5],\ \alpha_2 \in [1,\ 2],\ \alpha_3 \in [-4,\ -5])$$

on a:

$$(P_3(0) \times P_3(0.5) < 0,\ P_3(1) \times P_3(2) < 0,\ P_3(-4) \times P_3(-5) < 0)$$

On applique la méthode de Bissection (Dichotomie) sur $P_3(x)$ pour determiner la racine dans l'intervalle le plus petit modulé; c'est-à-dire l'intervalle $[0,\ 0.5]$, c'est-à-dire $\alpha_1 =?$ à un erreur $\epsilon = 10^{-2}$:

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon \Longleftrightarrow \frac{0.5-0}{2^n} < 10^{-2} \Longleftrightarrow n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 2} - 1 \Longleftrightarrow n = [5.64] + 1 = 6$$

$x_0 = \dfrac{0+0.5}{2} = \dfrac{1}{4}$ et $P_3(\frac{1}{4}) = -1.24 < 0$ alors $x_1 = \dfrac{0+\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{1}{8}$ et $P_3(\frac{1}{8}) = 0.25$ alors $x_2 \in [\frac{1}{8},\ \frac{1}{4}]$ car $P_3(\frac{1}{8}) \times P_3(\frac{1}{4}) < 0$ alors $\cdots$ alors $x_6 = \cdots$ la solution demandé.

$$x_2 \in [0;\ 0.25]\ \ x_2 = \frac{0+0.25}{2} = 0.125\ \ et\ \ P_3(0.125) = 0.25$$

$$x_3 \in [0.125;\ 0.25]\ \ x_3 = \frac{0.125 + 0.25}{2} = 0.1875\ \ et\ \ P_3(0.1875) = -0.11$$

$$x_4 \in [0.125;\ 0.1875]\ \ x_4 = \frac{0.125 + 0.1875}{2} = 0.156\ \ et\ \ P_3(0.156) = 0.06$$

$$x_5 \in [0.15;\ 0.1875]\ \ x_5 = \frac{0.125 + 0.1875}{2} = 0.165\ \ et\ \ P_3(0.165) = 0.04$$

$$x_6 \in [0.165;\ 0.1875]\ \ x_6 = \frac{0.165 + 0.1875}{2} = 0.17625$$

Alors la solution approchée est $x_6 = 0.17625$

Solution d'exercice 5.

Séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10.$$

$$(+1)(-6)(+3)(+10)$$

$$(+)(-)(+)(+)$$

Deux changement de signes alors ils existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_3(-x) = -x^3 - 6x^2 - 3x + 10.$$

$$(-1)(-6)(-6)(+10)$$

$$(-)(-)(-)(+)$$

Un seul changement de signes alors il existe une seule racine négative.
Soit le polynôme $P_3(x) = x^3-6x^2+3x+10$, ce polynôme admet trois solutions $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ dans l'intervalle $]-T,\ T[$ avec $T = 1 + \frac{1}{\mid a_0 \mid}\max(\mid a_1 \mid,\ \mid a_2 \mid,\ \mid a_3 \mid)$ tels que:
$a_0 = 1,\ a_1 = -6,\ a_2 = 3,\ a_3 = 10$ les coefficients de ce polynôme.

$$T = 1 + \frac{1}{\mid +1 \mid}\max(\mid -6 \mid,\ \mid +3 \mid,\ \mid +10 \mid) = 11$$

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in]-11,\ +11[.$$

On applique le théorème de `STURM` pour séparer les racines (chaque racine dans un intervalle approprie): pour cela on construit la suite de `STURM`:

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{S}_0(x) & = & \mathrm{P}_3(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10. \\
\mathrm{S}_1(x) & = & \mathrm{P}_3'(x) = 3x^2 - 12x + 3. \\
\mathrm{S}_2(x) & = & \text{-Rest}\left(\dfrac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = 6x - 12. \\
\mathrm{S}_3(x) & = & \text{-Rest}\left(\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = 1.
\end{array}$$

En prennant les signes de cette suite pour les valeurs: $(-\infty,\ -11,\ 0,\ 11,\ +\infty)$, on peut dresser le tableau suivant:

x	$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	*nombre de changement de signes*
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-11	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$	$+$	$-$	$+$	2
11	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Pas de racines dans les intervalles $]-\infty,\ -11[,\ ]11,\ +\infty[$, car $N(-\infty) - N(-11) = (3-3) = N(11) - N(+\infty) = (0-0) = 0$.
(une racine négative) appartient à $]-11, 0[$ car $N(-11) - N(0) = 3 - 2 = 1$;
(deux racines) appartient à $]0, 11[$ car $N(0) - N(11) = 2 - 0 = 2$.

Solution d'exercice 6.
On considère le polynôme $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, on rappel que si le dernier terme de la suite de `STURM` égale 0 alors le polynôme admet une racine multiple.
Séparons les racines par la règle des signes de Descartes, le nombre de racines positives et le nombre de racines négatives; le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(x)$:

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$
$$(+1)(-3)(+4)$$
$$(+)(-)(+)$$

Deux changements de signes alors ils existent deux racines positives.
Et le nombre de racines positives égale le nombre de changement de signes en parcourant les coefficients de polynôme $P_n(-x)$:

$$P_3(-x) = -x^3 - 3x^2 + 4.$$
$$(-1)(-3)(+4)$$
$$(-)(-)(+)$$

Un seul changement de signes alors il existe une seule racine négative.
Soit le polynôme $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, ce polynôme admet trois solutions $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ dans l'intervalle $]-T,\ T[$ avec $T = 1 + \frac{1}{\mid a_0 \mid} \max(\mid a_1 \mid,\ \mid a_2 \mid,\ \mid a_3 \mid)$ tels que:
$a_0 = 1,\ a_1 = -3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 4$ les coefficients de ce polynôme.

$$T = 1 + \frac{1}{\mid +1 \mid} \max(\mid -3 \mid,\ \mid 0 \mid,\ \mid +4 \mid) = 5$$

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in]-5,\ +5[.$$

On applique le théorème de `STURM` pour séparer les racines (chaque racine dans un intervalle approprie): pour cela on construit la suite de `STURM`:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(x) &= \mathrm{P}_3(x) = x^3 - 3x^2 + 4.\\
\mathrm{S}_1(x) &= \mathrm{P}_3'(x) = 3x^2 - 6x.\\
\mathrm{S}_2(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_0(x)}{S_1(x)}\right) = x - 2.\\
\mathrm{S}_3(x) &= \text{-Rest}\left(\frac{S_1(x)}{S_2(x)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

$S_3(x)$ étant nul, $P_3(x)$ admet une racine multiple, qui est celle de $S_2(x) = 0$, soit $x = 2$.
En prennant les signes de cette suite pour les valeurs: $(-\infty,\ -5,\ 0,\ +5,\ +\infty)$, on peut dresser le tableau suivant:

x	$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	*nombre de changement de signes*
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	2
-5	$-$	$+$	$-$	2
0	$+$	*Sans signe*	$-$	1
$+5$	$+$	*Sans signe*	$+$	0
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0

Pas de racines dans les intervalles $]-\infty, -5[,\ ]5, +\infty[$, car $N(-\infty) - N(-5) = (2-2) = N(5) - N(+\infty) = (0-0) = 0$.
(une racine négative) appartient à $]-5, 0[$ car $N(-5) - N(0) = 2 - 1 = 1$;
(une racine multiple égale 2) appartient à $]0, 5[$ car $N(0) - N(5) = 1 - 0 = 1$.
Et conçernant la méthode de `Newton`, la condition de la méthode est que: $P_3(x) \times P_3''(x) \geq 0$, or ça est vérifié.
La méthode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_3(x_n)}{P_3'(x_n)} = \frac{1}{3}\left(x_n - \frac{4}{x_n} + 2\right)$$

Pour $x_0 = 1$, on obtient:

$$x_1 = 2.33333333$$
$$x_2 = 2.015873016$$

$$x_3 = 2.000041661$$
$$x_4 = 2.00000000$$
$$x_5 = 2.00000000$$

Et bien donc

$$x_n = 2$$

La solution $x = 2$.

Université D.L de Sidi Bel-Abbès	**Année : 2019/2020**
Faculté de Génie Éléctrique	**2ième année Licence**
Départements de : TLC et ELN	**Par: Mr.Mahiddine A/R**
Module: Méthodes Numériques	**Fiche de TD N 02**

Exercices Sur L'interpolation Polynômiale Et La Résolution des Équations Linéaires

---

Exercice 1.

1. Soit f une fonction connue aux points $x_0 = -4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$ par: $f(-4) = 256$, $f(-2) = 16$, $f(0) = 0$, $f(2) = 16$, $f(4) = 256$. Trouver le polynôme d'interpolation par la méthode de Lagrange, et estimer la valeur de f au point $x_5 = 6$.

2. Soit $f(x) = \ln x$; estimer la valeur de $\ln(0.60)$ avec:

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$f(x)$	-0.916291	-0.6993147	-0.356675	-0.223144

Exercice 2. Soient les trois points $q_1 = (0; 1)$, $q_2 = (\pi/16; \cos(\pi/16))$, $q = (\pi/8; \cos(\pi/8))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$. Obtenir à l'aide de l'interpolation de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les trois points et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

Exercice 3. On considère les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ définies par :

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	2	3
$f(x_i)$	34	0	0	78	384

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
$g(x_i)$	-3/2	0	1/4	0	0

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
$h(x_i)$	-1	-1	-11	-61	-205

1). Établir l'expression du polynôme de Lagrange et de Newton de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
2). Par intégration du polynôme obtenu, déduire la formule d'intégration approchée suivante:

$$\int_{-1}^{1} k(x)dx \approx 1/4k(-1) + 3/4k(-1/3) + 3/4k(1/3) + 1/4k(1).$$

Exercice 4. Soit $f(x) = \cos(\pi x)$, $x \in [-1, +1]$ et $P(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 sur $[-1, +1]$.

1. Justifier sans calcul le degré exact de $P(x)$.

2. Appliquer l'algorithme de Newton pour calculer $P(x)$. En déduire l'expression de $P(x)$.

3. Donner l'estimation de l'erreur d'interpolation $f(x) - P(x)$, $x \in [-1, +1]$.

4. Estimer l'erreur d'interpolation en $x = 0$ et comparer avec l'erreur exacte.

5. Intégrer $f(x)$ par les deux méthodes d'intégrations simpson et trapèzes généralisées.

Exercice 5. Calculer par la méthode de Simpson l'intégrale: $I_1 = \int_0^9 x\sqrt{x^2+1}dx$.

Exercice 6. Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ par la méthode de Jordan et résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. On considère la matrice A et le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la formule de Cramer résoudre le système $Ax = b$.
2. En utilisant la méthode de Krylov, déterminer le polynôme caractéristique, en déduire les valeurs et vecteurs propres de la matrice A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices L et U sont triangulaire inférieure et supérieure respectivement. En déduire A^{-1}. Retrouver A^{-1} par par la méthode de Gauss-Jordan.
4. Montrer que A est symétrique et définie positive. Résoudre alors le système $Ax = b$ par la méthode de Choleski.
5. Résoudre le même système, avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$, par la méthode de Jacobi. On partira de: $X^{(0)} =^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Seidel. On prendra le même vecteur initial qu'à la question précédente et avec la même précision.

Exercice 8. Soit le système linéaire: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 4 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a). Vérifier s'il y'a convergence de processus.
- b). Dans le cas positif, combien d'itérations faut-il réaliser pour trouver la solution à 3 décimales avec une erreur $\epsilon = 0.5 \times 10^{-3}$.
- c). En considérant comme vecteur initial $X^0 \begin{pmatrix} 3.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}^t$, résoudre le système par:
  1. La méthode des approximations succssives, (faire 3 itérations).
  2. La méthode de Seidel (faire 2 itérations).

Exercice 9.

Calculer les valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, avec la condition initiale $y(0) = y_0 = 1$ aux point $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.4$ d'aprés la méthode de RK-2 et RK-4, effectuer les calculs à 4 décimales exactes. Estimer le résultat obtenu si la solution est $y = \sqrt{2x+1}$.

....

Bon courage

Université D.L de Sidi Bel-Abbès **Année : 2019/2020**
Faculté de Génie Éléctrique **2ième année Licence**
Départements de : TLC et ELN **Par: Mr.Mahiddine A/R**
Module: Méthodes d'Analyse Numériques **Fiche de TD N 02**

Solution de la fiche de TD N 02

Exercice 1.

1. Soit f une fonction connue aux points $x_0 = -4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$ par: $f(-4) = 256$, $f(-2) = 16$, $f(0) = 0$, $f(2) = 16$, $f(4) = 256$. Trouver le polynôme d'interpolation par la méthode de Lagrange, et estimer la valeur de f au point $x_5 = 6$.

2. Soit $f(x) = \ln x$; estimer la valeur de $\ln(0.60)$ avec:

x	0.40	0.50	0.70	0.80
$f(x)$	-0.916291	-0.6993147	-0.356675	-0.223144

Solution d'exercice 1.
Les valeurs des variables x_i, $\forall i = 0, \cdots, 4$, sont données par :

$$x_0 = -4,\ x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4.$$

on sait les valeurs des $y_i = f(x_i)$:

$$y_0 = f(x_0) = f(-4) = 256,\ y_1 = f(x_1) = f(-2) = 16,\ y_2 = f(x_2) = f(0) = 0,\ y_3 = f(x_3) = f(2) = 16,\ y_4 = f(x_4) = f($$

La question posée ce qu'on cherche à trouver le polynôme d'interpolation $P_4(x)$ de la fonction $f(x)$, puis à estimer la valeur de f au point $x_5 = 6$, par la méthode d'interpolation de Lagrange.
pour cela la formule de Lagrange pour $i = 4$, est donnée par:

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$

avec les $L_i(x)$ sont déterminées par: $L_i(x) = \dfrac{\prod_{i\neq j}(x - x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_i - x_j)}$ d'où:

$$L_0(x) = \frac{\prod_{0\neq j}(x - x_j)}{\prod_{0\neq j}(x_0 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-0)(x-2)(x-4)}{(-4-2)(-4-0)(-4-2)(-4-4)} = \frac{(x^3 - 4x)(x-4)}{384} = \frac{x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x}{384}$$

$$L_1(x) = \frac{\prod_{1\neq j}(x - x_j)}{\prod_{1\neq j}(x_1 - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$= \frac{(x+4)(x-0)(x-2)(x-4)}{(-2+4)(-2-0)(-2-2)(-2-4)} = \frac{(x^3 - 16x)(x-2)}{-96} = \frac{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 32x}{-96}$$

$$L_2(x) = \frac{\prod_{2\neq j}(x - x_j)}{\prod_{2\neq j}(x_2 - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$= \frac{(x+4)(x-2)(x-2)(x-4)}{(0-2)(0+2)(0-2)(0-4)} = \frac{(x^2-16)(x^2-4)}{64} = \frac{x^4-20x^2-64}{64}$$

$$L_3(x) = \frac{\prod\limits_{3\neq j}(x-x_j)}{\prod\limits_{3\neq j}(x_3-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$= \frac{(x+4)(x+2)(x-0)(x-4)}{(2+4)(2+2)(2-0)(2-4)} = \frac{(x^3-16x)(x+2)}{-96} = \frac{x^4+2x^3-16x^2-32x}{-96}$$

$$L_4(x) = \frac{\prod\limits_{4\neq j}(x-x_j)}{\prod\limits_{4\neq j}(x_4-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$= \frac{(x+4)(x+2)(x-0)(x-2)}{(4+4)(4+2)(4-0)(4-2)} = \frac{(x^3-4x)(x+4)}{384} = \frac{x^4+4x^3-4x^2-16x}{384}$$

$$P_4(x) = 256\left(\frac{x^4-4x^3-4x^2+16x}{384}\right) + 16\left(\frac{x^4-2x^3-16x^2+32x}{-96}\right) + 0\left(\frac{x^4-20x^2-64}{64}\right)$$
$$+16\left(\frac{x^4+2x^3-16x^2-32x}{-96}\right) + 256\left(\frac{x^4+4x^3-4x^2-16x}{384}\right).$$

$$P_4(x) = x^4$$

$$P_4(x_5) = P_4(6) = 6^4 = 1296$$

Partie 2. Soit $f(x) = \ln x$; estimer la valeur de $\ln(0.6)$, par la méthode d'interpolation de Lagrange avec:

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	-0.916291	-0.6993147	-0.356675	-0.223144

$\ln(0.6) = f(0.6) = P_3(0.6)$ et pour calculer cette valeur on cherche à déterminer le polynôme $P_3(0.6)$ suivant:

$$P_3(0.6) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(0.6) = y_0L_0(0.6) + y_1L_1(0.6) + y_2L_2(0.6) + y_3L_3(0.6)$$

$$L_0(0.6) = \frac{(0.6+0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)} = -0.16$$

$$L_1(0.6) = \frac{(0.6-0.4)(0.6-0.7)(0.6-0.8)}{(0.5-0.4)(0.5-0.7)(0.5-0.8)} = 0.66$$

$$L_2(0.6) = \frac{(0.6-0.4)(0.6-0.5)(0.6-0.8)}{(0.7-0.4)(0.7-0.5)(0.7-0.8)} = 0.66$$

$$L_3(0.6) = \frac{(0.6-0.4)(0.6-0.5)(0.6-0.7)}{(0.8-0.4)(0.8-0.5)(0.8-0.7)} = -0.16$$

$$P_3(0.6) = (-0.916291)(-0.16) + (-0.6993147)(0.66) + (-0.356675)(0.66) + (-0.223144)(-0.16) = -0.5146436.$$

$$\ln(0.6) \simeq P_3(0.6) = -0.5146436 = y^* \ (\textit{valeur approche}).$$

$$\ln(0.6) = -0.5108256 = y \ (\textit{valeur exacte}).$$

Exercice 2. Soient les trois points $q_1 = (0; 1)$, $q_2 = (\pi/16; \cos(\pi/16))$, $q = (\pi/8; \cos(\pi/8))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$. Obtenir à l'aide de l'interpolation de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les trois points et en déduire une approximation de $\cos(\pi/32)$.

Solution d'exercice 2.
Soit $f(x) = \cos x$; estimer la valeur de $\cos(\frac{\pi}{32})$, par la méthode d'interpolation de Lagrange avec:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$
$f(x)=\cos x$	1	$\cos\frac{\pi}{16}$	$\cos\frac{\pi}{8}$

La méthode directe de Lagrange est :

$$L_0(x)=\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\frac{128}{\pi^2}=\frac{128}{\pi^2}\left(x^2-\frac{3\pi}{16}x+\frac{\pi^2}{128}\right)$$

$$L_1(x)=\left(x^2-\frac{\pi}{8}x\right)\frac{16\times 16}{-\pi^2}=\frac{-256}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{8}x\right)$$

$$L_2(x)=\left(x^2-\frac{\pi}{16}x\right)\frac{128}{\pi^2}=\frac{128}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{16}x\right)$$

$$P_2(x)=(1)\left(\frac{128}{\pi^2}\left(x^2-\frac{3\pi}{16}x+\frac{\pi^2}{128}\right)\right)+(0.98)\left(\frac{-256}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{8}x\right)\right)+(0.92)\left(\frac{128}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{16}x\right)\right)$$

$$P_2(x)=\frac{2.56}{\pi^2}x^2+\frac{0.06\times 32}{\pi^2}x+1$$

On cherche une approximation de la valeur de $\cos\frac{\pi}{32}$, par la méthode de Lagrange.

$$\cos\frac{\pi}{32}=f(\frac{\pi}{32})=P_2(\frac{\pi}{32}).$$

$$P_2(\frac{\pi}{32})=\sum_{i=0}^{2}y_iL_i(\frac{\pi}{32})=y_0L_0(\frac{\pi}{32})+y_1L_1(\frac{\pi}{32})+y_2L_2(\frac{\pi}{32})$$

$$L_0(\frac{\pi}{32})=\frac{(\frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{16})(\frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{8})}{(0-\frac{\pi}{16})(0-\frac{\pi}{8})}=\frac{3}{8}$$

$$L_1(\frac{\pi}{32})=\frac{(\frac{\pi}{32}-0)(\frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{8})}{(\frac{\pi}{16}-0)(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{8})}=\frac{3}{4}$$

$$L_2(\frac{\pi}{32})=\frac{(\frac{\pi}{32}-0)(\frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{8})}{(\frac{\pi}{8}-0)(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{16})}=\frac{-1}{8}$$

$$P_2(\frac{\pi}{32})=(1)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{-1}{8}\right)=0.99510402$$

$$\cos(\frac{\pi}{32})\simeq P_2(\frac{\pi}{32})=0.99510402=y^*\ (\textit{valeur approche}).$$

$$\cos(0.99510402)=0.99518473=y(\textit{valeur exacte}).$$

Exercice 3. On considère les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ définies par :

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	2	3
$f(x_i)$	34	0	0	78	384

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	-1/2	0	1/2	1
$g(x_i)$	-3/2	0	1/4	0	0

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
$h(x_i)$	-1	-1	-11	-61	-205

1). Établir l'expression du polynôme de Lagrange et de Newton de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.
2). Par intégration du polynôme obtenu, déduire la formule d'intégration approchée suivante:

$$\int_{-1}^{1}k(x)dx\approx 1/4k(-1)+3/4k(-1/3)+3/4k(1/3)+1/4k(1).$$

Solution d'exercice 3.

Exercice 4. Soit $f(x)=\cos(\pi x)$, $x\in[-1,+1]$ et $P(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, $\frac{-1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 sur $[-1,+1]$.

1. Justifier sans calcul le degré exact de $P(x)$.
2. Appliquer l'algorithme de Newton pour calculer $P(x)$. En déduire l'expression de $P(x)$.
3. Donner l'estimation de l'erreur d'interpolation $f(x) - P(x),\ x \in [-1,\ +1]$.
4. Estimer l'erreur d'interpolation en $x = 0$ et comparer avec l'erreur exacte.
5. Intégrer $f(x)$ par les deux méthodes d'intégrations simpson et trapèzes généralisées.

Solution d'exercice 4.
Le degré du polynôme $P_n(x) = f(x)$, n est inférieur strictement à 3 parce que la fonction $\cos(\pi x)$ est paire alors $P_n(x) = f(x) = P_2(x)$, de plus le dernier coefficient de *Newton* $S^3 = 0$.

x_i	$y_i = f(x_i) = S_i^0$	S_i^1	S_i^2	S_i^3
-1	-1			
		$\dfrac{\frac{1}{2} - (-1)}{\frac{-1}{3} - (-1)} = \dfrac{9}{4}$		
$\dfrac{-1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{0 - \frac{9}{4}}{\frac{1}{3} + 1} = \dfrac{-27}{16}$	
		$\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 0$		$\dfrac{\frac{-27}{16} + \frac{27}{16}}{1 - (-1)} = 0$
$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{\frac{9}{4} - 0}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{-27}{16}$	
		$\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{9}{4}$		
1	1			

$$P_n(x) = S_1^0 + S_1^1(x - x_0) + S_1^2(x - x_0)(x - x_1) + S_1^3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$P_2(x) = (-1) + \frac{9}{4}(x + 1) + \frac{27}{16}(x + 1)(x + \frac{1}{3}) + (0)(x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})$$
$$P_2(x) = \frac{-27}{16}x^2 + \frac{11}{16}$$

$\epsilon(x) = f(x) - P_2(x)$ la valeur exacte de l'erreur de l'interpolation, la valeur approchée de cet erreur est donnée par cette formule:

$$\epsilon(x) = \frac{b - a}{n!} f^{(n)}(x) \left(\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \right)$$

avec $f^{(n)}(x)$ c'est la n^{ime} dérivée de $f(x)$ et $[a,\ b] = [-1,\ 1]$.

$$\epsilon(x) = \frac{1 - (-1)}{2!}(-\pi^2 \cos(\pi x)) \left((x + 1)(x + \frac{1}{3}) \right) = (-\pi^2 \cos(\pi x)) \left((x + 1)(x + \frac{1}{3}) \right)$$

L'estimation de l'erreur au point $x = 0$ est calculé par :

$$\epsilon(0) = (-\pi^2 \cos(\pi 0)) \left((0 + 1)(0 + \frac{1}{3}) \right) = \frac{-\pi^2}{3}$$

Mais l'erreur exacte est calculé par : $f(0) - P_2(0) = \dfrac{5}{16}$.
On remarque que $\epsilon(0) = \dfrac{-\pi^2}{3}$ l'erreur approchée est différente de l'erreur exacte $\epsilon(0) = \dfrac{5}{16}$.
On calcule maintenant l'intégrale de $f(x)$ par la méthode de Simpson et puis par la méthode des Trapèzes:

$$I_{simpson} = \frac{h}{3} \left(y_0 + 4 \left(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots \right) + 2 \left(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots \right) + y_n \right)$$

On a: $h = x_{i+1} - x_i = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$

$$I_{simpson} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1\right) + 2\left(y_2\right) + y_3\right)$$

$$I_{simpson} = \frac{\frac{2}{3}}{3}\left((-1) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\right)$$

$$I_{simpson} = \frac{2}{9}$$

par la méthode des Trapèzes:

$$I_{Trapzes} = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \cdots\right) + y_n\right)$$

$$I_{Trapzes} = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\left(y_1 + y_2\right) + y_3\right)$$

$$I_{Trapzes} = \frac{\frac{2}{3}}{2}\left((-1) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + (-1)\right)$$

$$I_{Trapzes} = \frac{2}{6} \times (0)$$

$$I_{Trapzes} = 0$$

Exercice 5. On calcule par la méthode de Simpson l'intégrale suivant: $I_1 = \int_0^9 x\sqrt{x^2+1}dx$.

Solution d'exercice 5.
On choisit un $h = 1$ et $h = 3$ et on voit la différence des deux h choisis: Pour $h = 1$ on a:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{10}$	$4\sqrt{17}$	$5\sqrt{26}$	$6\sqrt{37}$	$7\sqrt{50}$	$8\sqrt{65}$	$9\sqrt{82}$

Et pour $h = 3$ on a:

$x_0 = 0$	$x_1 = 3$	$x_2 = 6$	$x_3 = 9$
$y_0 = 0$	$y_1 = \sqrt{2}$	$y_2 = 6\sqrt{37}$	$y_3 = 9\sqrt{82}$

On rappelle la loi générale de l'intégral de Simpson est :

$$I_{simpson} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots\right) + y_n\right)$$

Pour $h = 1$ on trouve:

$$I_{simpson} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7\right) + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + y_9\right)$$

$$I_{simpson} = \frac{1}{3}\left((0) + 4\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{10} + 5\sqrt{26} + 7\sqrt{50}\right) + 2\left(2\sqrt{5} + 4\sqrt{17} + 6\sqrt{37} + 8\sqrt{65}\right) + (9\sqrt{82})\right)$$

$$I_{simpson} = 222.997$$

Pour $h = 3$ on trouve:

$$I_{simpson} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\left(y_1\right) + 2\left(y_2\right) + y_3\right)$$

$$I_{simpson} = \frac{3}{3}\left((0) + 4\left(3\sqrt{10}\right) + 2\left(6\sqrt{37}\right) + (9\sqrt{82})\right)$$

$$I_{simpson} = 192.438$$

Remarque: on voit que si on augmente le pas h, on perd l'exactitude de l'intégrale I.

Exercice 6. Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ par la méthode de Jordan et résoudre $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Solution d'exercice 6.
pour résoudre ce système et déterminer x par la méthode de Jordan, on suit ces étapes:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice $P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ -2/1 & 1 & 0 \\ -3/1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $alors$:

$$A^{(1)} = P^{(1)} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Et

$$b^{(1)} = P^{(1)} \times b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -3/-4 & 0 \\ 0 & 1/-4 & 0 \\ 0 & -7/-4 & 1 \end{pmatrix}$ $alors$:

$$A^{(2)} = P^{(2)} \times A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -3/-4 & 0 \\ 0 & 1/-4 & 0 \\ 0 & -7/-4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -27/2 \end{pmatrix}$$

Et

$$b^{(2)} = P^{(2)} \times b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -3/-4 & 0 \\ 0 & 1/-4 & 0 \\ 0 & -7/-4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 29/2 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice $P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/27 \\ 0 & 1 & 3/27 \\ 0 & 0 & -2/27 \end{pmatrix}$ $alors$:

$$A^{(3)} = P^{(3)} \times A^{(2)} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/27 \\ 0 & 1 & 3/27 \\ 0 & 0 & -2/27 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -27/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$b^{(3)} = P^{(3)} \times b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/27 \\ 0 & 1 & 3/27 \\ 0 & 0 & -2/27 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 29/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 10/9 \\ -29/27 \end{pmatrix}$$

Finalement A^{-1} est déterminé par cette égalité:

$$A^{-1} = P^{(3)} \times P^{(2)} \times P^{(1)}$$

$$A^{-1} = P^{(3)} \times P^{(2)} \times P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/27 \\ 0 & 1 & 3/27 \\ 0 & 0 & -2/27 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3/-4 & 0 \\ 0 & 1/-4 & 0 \\ 0 & -7/-4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.55 & -0.11 \\ -0.22 & -0.05 & 0.11 \\ -0.48 & 0.12 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. On considère la matrice A et le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la formule de Cramer résoudre le système $Ax = b$.
2. En utilisant la méthode de Krylov, déterminer le polynôme caractéristique, en déduire les valeurs et vecteurs propres de la matrice A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices L et U sont triangulaire inférieure et supérieure respectivement. En déduire A^{-1}. Retrouver A^{-1} par par la méthode de Gauss-Jordan.
4. Montrer que A est symétrique et définie positive. Résoudre alors le système $Ax = b$ par la méthode de Choleski.
5. Résoudre le même système, avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$, par la méthode de Jacobi. On partira de: $X^{(0)} =^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. Résoudre le système $Ax = b$ par la méthode de Gauss-Seidel. On prendra le même vecteur initial qu'à la question précédente et avec la même précision.

Solution d'exercice 7.

On veut résoudre ce système $AX = b$ par la méthode de Cramer, on suppose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la méthode de Cramer il faut que le déterminant de la matrice A est différent de zéro, $\det A \neq 0$.

$$\det A = (+)(6) \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} (-)(-2) \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} (+)(2) \det \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (6)(35 - 0) + (2)(-14 - 0) + (2)(-2 - 0) = 162$$

Et de même on fait le calcule des déterminant des matrices aux dominateur des solutions x, y et z. Soient les solutions x, y et z de Cramer tels que:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 23 & 5 & 0 \\ 16 & 0 & 7 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{162}{162} = 1.$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 23 & 0 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{810}{162} = 5.$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 23 \\ 2 & 0 & 16 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{324}{162} = 2.$$

Alors la solution

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La question maintenant est d'appliquer la méthode de *Krylov* pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A:

Premièrement on cherche à déterminer la suite $y^{(n)} = A \times y^{(n-1)}$, en commençant de $y^{(0)}$ vecteur initial non nul, on prend pour $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors:

$$y^{(1)} = A \times y^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$y^{(2)} = A \times y^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -22 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

$$y^{(3)} = A \times y^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 44 \\ -22 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ -198 \\ 270 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres notées par λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A sont solutions de $P_3(\lambda) = 0$ avec

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

tels que les coefficients a_0, a_1 et a_2 sont solutions du système suivant:

$$\begin{pmatrix} y^{(2)} & y^{(1)} & y^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 44 & 6 & 1 \\ -22 & -2 & 0 \\ 26 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -360 \\ 198 \\ -270 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 44a_0 + 6a_1 + 1a_3 = -360. \\ -22a_0 - 2a_1 + 0a_3 = 198. \\ 26a_0 + 2a_1 + 0a_3 = -270. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = -18. \\ a_1 = 99. \\ a_3 = -162. \end{cases}$$

D'où le polynôme caractéristique $P_3(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$, maintenant on cherche les solutions de l'équation suivante:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

pour déterminer les valeurs propres, la solution particulière de cette équation est $\lambda_1 = 3$, on fait après la division euclidienne pour les deux autres valeurs propres on trouve le polynôme d'ordre 2 $Q_2(\lambda)$:

$$P_3(\lambda) = (\lambda - 3)Q_2(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54).$$

Les solutions de $Q_2(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 54 = 0$ sont les deux autres valeurs propres qui restent. $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 9$. Finalement les valeurs propres de la matrice A sont: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ et $\lambda_3 = 9$.

Pour déterminer les vecteurs propres de A on fait la division euclidienne de $\dfrac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$ et $\dfrac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_2}$ et $\dfrac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_3}$. Les coefficients ceux qu'on trouve on les utilise pour déterminer les vecteurs propres de A. On trouve les polynômes suivants:

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = \lambda^2 - 15\lambda + 54 \Longrightarrow V_1 = (1)y^{(2)} + (-15)y^{(1)} + (54)y^{(0)}.$$

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda^2 - 12\lambda + 27 \Longrightarrow V_1 = (1)y^{(2)} + (-12)y^{(1)} + (27)y^{(0)}.$$

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_3} = \lambda^2 - 9\lambda + 18 \Longrightarrow V_1 = (1)y^{(2)} + (-9)y^{(1)} + (18)y^{(0)}.$$

tels que les vecteurs V_1 et V_2 et V_3 sont les vecteurs propres de la matrice A.

$$V_1 = (1) \times \begin{pmatrix} 44 \\ -22 \\ 26 \end{pmatrix} + (-15) \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (54) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$V_2 = (1) \times \begin{pmatrix} 44 \\ -22 \\ 26 \end{pmatrix} + (-12) \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (27) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$V_3 = (1) \times \begin{pmatrix} 44 \\ -22 \\ 26 \end{pmatrix} + (-9) \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + (18) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

La Méthode de triangularaisation de Gauss, on va suivre les étapes suivantes:

Soit la matrice $P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(1)} = P^{(1)} \times A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/13 & 1/3 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 \end{pmatrix}.$$

Et

$$b^{(1)} = P^{(1)} \times b = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(2)} = P^{(2)} \times A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1/13 & 1/3 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/13 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 81/13 \end{pmatrix}.$$

Et

$$b^{(2)} = P^{(2)} \times b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 69/13 \\ 162/13 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice $P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/81 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(3)} = P^{(3)} \times A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/81 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1/13 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 81/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et

$$b^{(3)} = P^{(3)} \times b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/81 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 69/13 \\ 162/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 69/13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalement, il nous reste qu'à résoudre le système $A^{(3)}X = b^{(3)}$ car la solution de ce dernière est la solution elle même du système $AX = b$:

$$A^{(3)}X = b^{(3)} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 69/13 \\ 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1. \\ y = 5. \\ z = 2. \end{cases}$$

La solution est donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La décomposition $A = L \times U$, la matrice U n'est autre que $A^{(3)}$: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'autre part

$$L = \left(P^{(3)} \times P^{(2)} \times P^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 13/3 & 0 \\ 2 & 2/3 & 81/13 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de A s'écrit $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ avec $L^{-1} = \left(P^{(3)} \times P^{(2)} \times P^{(1)}\right)$, alors :

$$A^{-1} = U^{-1} \times L^{-1} = \frac{1}{162} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -5/13 \\ 0 & 1 & -2/13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/13 & 3/13 & 0 \\ -5/81 & -2/81 & 13/81 \end{pmatrix} = \frac{1}{162} \begin{pmatrix} 35 & 14 & -10 \\ 14 & 38 & -4 \\ -10 & -4 & 26 \end{pmatrix}$$

A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan:

Soit la matrice $P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(1)} = P^{(1)} \times A = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/13 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(2)} = P^{(2)} \times A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1/13 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 \\ 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1/13 & 1/3 \\ 0 & 13/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 19/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/13 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 81/13 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice $P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/81 \\ 0 & 1 & -2/81 \\ 0 & 0 & 13/81 \end{pmatrix}$, *alors* :

$$A^{(3)} = P^{(3)} \times A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/81 \\ 0 & 1 & -2/81 \\ 0 & 0 & 13/81 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/13 \\ 0 & 1 & 2/13 \\ 0 & 0 & 81/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^{-1} = P^{(3)} \times P^{(2)} \times P^{(1)} = \frac{1}{162} \begin{pmatrix} 35 & 14 & -10 \\ 14 & 38 & -4 \\ -10 & -4 & 26 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Cholesky: le but de la méthode de Cholesky est de faire une décomposition de la matrice A sous la forme ${}^tR \times R$, telle que $R = (\sqrt{D})^{-1} \times U$, la matrice U vienne de la décomposition de Croute et D c'est la matrice diagonale de la matrice L vienne aussi de la décomposition de Crout. la solution du système $AX = b$ sera équivalent à la résolution du système suivant:

$$\begin{cases} {}^tR \times Y = b; \\ R \times X = Y. \end{cases}$$

Mais pour appliquer la méthode de Cholesky il faut que la matrice A vérifier trois conditions:

1. A est symétrique c'est-à-dire les composantes de A vérifient: $(a_{ij} = a_{ji})$.
2. A est définie positive: ${}^tXAX \geq 0, \forall X \in M_{n\times 1}$.
3. $\det A_{[k]} \neq 0, \forall k = 1,\ 2,\ 3.$

La première et la troisième conditions sont vérifiables; mais de la deuxième condition, on doit faire les calculs. En effet, on trouve:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 7x_3^2.$$

$$= 2(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 \geq 0,\ \forall x_1,\ x_2\ et\ x_3 \in \mathbb{R}.$$

La matrice A est done définie positive. Et de ces trois conditions la matrice A on trouve qu'elle décomposable par la méthode de Cholesky.

Après les calcules on trouve:

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & \sqrt{39}/3 & 0 \\ 2\sqrt{6} & 2\sqrt{39}/39 & 2\sqrt{39}/13 \end{pmatrix} \Longrightarrow^t R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{39}/3 & 2\sqrt{39}/39 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{39}/13 \end{pmatrix}$$

La résolution de $RY = b$ nous donne la valeur de Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 23\sqrt{39}/13 \\ 18\sqrt{13}/13 \end{pmatrix}$$

Et la résolution de ${}^tRX = Y$ nous donne la valeur de X:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4/question: La formule d'itération de *Jacobi* s'écrit:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right). \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(23 + 2x_1^{(k)}\right). \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{7}\left(8 - x_1^{(k)}\right). \end{cases}$$

La matrice A étant diagonale dominante, les méthodes de *Jacobi* et *Gauss-Seidel* convergent. Les résultats sont regroupés dans les tableaux ci-dessous:
Le tableau de *Jacobi* est le suivant:

k	x_1	x_2	x_3
0	1	0	0
1	0	5	2
2	1	4.6	2.285714
3	0.771428	5	2
4	1	4.908571	2.065306
5	0.9477555	5	2
6	1	4.979102	2.014985
7	0.988038	5	2
8	1	4.995215	2.003417
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

D'où $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ et $x_3 = 2$.
La formule d'itération de *Gauss-Seidel* s'écrit:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left(x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right). \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(23 + 2x_1^{(k)}\right). \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{7}\left(8 - x_1^{(k)}\right). \end{cases}$$

Ce qui donne comme résultats le tableau *Gauss-Seidel* ci-dessous:

k	x_1	x_2	x_3
0	1	0	0
1	0	4.6	2.28
2	0.7714	4.9085	2.065
3	0.9477	4.9791	2.0149
4	0.9880	4.9952	2.0034
5	0.9972	4.9989	2.0004
6	0.9993	4.9999	2.0001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

D'où $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ et $x_3 = 2$.

Exercice 8. Soit le système linéaire:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 4 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a). Vérifier s'il y'a convergence de processus.
- b). Dans le cas positif, combien d'itérations faut-il réaliser pour trouver la solution à 3 décimales avec une erreur $\epsilon = 0.5 \times 10^{-3}$.
- c). En considérant comme vecteur initial $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}^t$, résoudre le système par:
  1. La méthode des approximations succssives, (faire 3 itérations).
  2. La méthode de Seidel (faire 2 itérations).

Solution d'exercice 8.
Pour vérifier s'il y'a convergence de processus S suivant, on vérifier que la norme de la matrice C soit inférieure à 1: Soit le système linéaire:

$$S \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 4 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 2. \\ \frac{1}{3}x_1 + 4x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 4 \\ \frac{1}{2}x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{3}x_3. \\ x_2 = 1 - \frac{1}{12}x_1 - \frac{1}{20}x_3. \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2. \end{cases}$$

On peut écrire ce système S sous la forme:

$$X^{(k+1)} = D + CX^{(k)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.33 \\ -0.083 & 0 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La norme de C est déterminée par:

$$\|C\| = \begin{cases} \max_{ligne}\left(\sqrt{(0)^2 + (-0.4)^2 + (-0.33)^2},\ \sqrt{(-0.083)^2 + (0)^2 + (-0.05)^2},\ \sqrt{(-0.25)^2 + (-0.5)^2 + (0)^2}\right) \\ \max_{colonne}\left(\sqrt{(0)^2 + (-0.083)^2 + (-0.25)^2},\ \sqrt{(-0.4)^2 + (0)^2 + (-0.5)^2},\ \sqrt{(-0.33)^2 + (-0.05)^2 + (0)^2}\right) \end{cases}$$

ce qui donne: $\|C\| = \begin{cases} \max_{ligne}(0.51,\ 0.09,\ 0.50) = 0.50 \\ \max_{colonne}(0.15,\ 0.65,\ 0.33) = 0.65 \end{cases} \Longrightarrow \|C\| = 0.65$, on trouve que $\|C\| = 0.65 < 1$ alors le processus converge (on peut déterminer la solution X). Mais jusqu'à quelle nombre (k) d'itération, si l'erreur égale à $\epsilon = 0.5 \times 10^{-3}$? on répond à cette question par cette inégalité:

$$\|C\|^k \leq \frac{1 - \|C\|}{\|D\|} \times \epsilon$$

avec $\|D\| = \left(\sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (3/2)^2}\right) = 7.25$.

$$\|0.65\|^{k+1} \leq \frac{1 - 0.65}{7.25} \times 0.5 \times 10^{-3} \Longleftrightarrow k \leq 23.68$$

On prends $k = 23$, alors la solution du système S est $X^{(23+1)} = X^{(24)}$. Et pour un vecteur initiale $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 4 - \frac{2}{5}x_2^{(0)} - \frac{1}{3}x_3^{(0)}. \\ x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{12}x_1^{(0)} - \frac{1}{20}x_3^{(0)}. \\ x_3^{(1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1^{(0)} - \frac{1}{2}x_2^{(0)}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)} = 4 - \frac{2}{5}(0.5) - \frac{1}{3}(0) = 3.8; \\ x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{12}(3.5) - \frac{1}{20}(0) = -0.75; \\ x_3^{(1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(3.5) - \frac{1}{2}(0.5) = 0.375; \end{cases}$$

et pour calculer $X^{(2)}$ on a:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 4 - \frac{2}{5}x_2^{(1)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)}. \\ x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{12}x_1^{(1)} - \frac{1}{20}x_3^{(1)}. \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1^{(1)} - \frac{1}{2}x_2^{(1)}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X^{(2)} = \begin{cases} x_1^{(2)} = 4 - \frac{2}{5}(-0.75) - \frac{1}{3}(0.375) = 4.175; \\ x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{12}(3.8) - \frac{1}{20}(0.375) = 0.664; \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(3.8) - \frac{1}{2}(-0.75) = 0.925; \end{cases}$$

et pour calculer $X^{(3)}$ on a:

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = 4 - \frac{2}{5}x_2^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(2)}. \\ x_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{12}x_1^{(2)} - \frac{1}{20}x_3^{(2)}. \\ x_3^{(3)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x_1^{(2)} - \frac{1}{2}x_2^{(2)}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X^{(2)} = \begin{cases} x_1^{(2)} = 4 - \frac{2}{5}(0.664) - \frac{1}{3}(0.925) = 3.426; \\ x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{12}(4.175) - \frac{1}{20}(0.925) = 0.605; \\ x_3^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}(4.175) - \frac{1}{2}(0.664) = 0.124; \end{cases}$$

Le principe de la méthode de *Seidel* est le suivant:

$$A = E + D + F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution est donnée par le vecteur $X^{(k+1)} = MX^{(k)} + f$ tels que: $\begin{cases} M = (D - E^{'})^{-1}F', & \text{F'=-F;} \\ f = (D - E^{'})^{-1}b, & \text{E'=-E.} \end{cases}$

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/6 \\ 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & -1/3 \\ 0 & 1/30 & -1/45 \\ 0 & 1/12 & 7/80 \end{pmatrix}$$

Et

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1/4 & 0 \\ -5/12 & -1/8 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2/5 & -1/3 \\ 0 & 1/30 & -1/45 \\ 0 & 1/12 & 7/80 \end{pmatrix} \times X^{(k)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Alors la solution est déterminée par:

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + 4. \\ \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{30}x_2^{(k)} - \frac{1}{45}x_3^{(k)} + \frac{2}{3}. \\ \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12}x_2^{(k)} + \frac{7}{80}x_3^{(k)} + \frac{1}{6}. \end{pmatrix}$$

On remplaçe k par 0 et par 1 on trouve:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} 3.8 \\ 0.68 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.728 \\ 0.684 \\ 0.240 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.
Calculer les valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle $y^{'} = y - \dfrac{2x}{y}$, avec la condition initiale $y(0) = y_0 = 1$ aux point $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.4$ d'aprés la méthode de RK-2 et RK-4, effectuer les calculs à 4 décimales exactes. Estimer le résultat obtenu si la solution est $y = \sqrt{2x+1}$.

Solution d'exercice 9.
1). Soit la solution y définie par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, (RK-2):

$$\begin{cases} \mathrm{y}_0 = 1, & \textit{valeur initiale donne};\\ \mathrm{y}^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), & h = x_{i+1} - x_i = 0.2;\\ \mathrm{y}_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left(f(x_i, y_i),\ f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\right). \end{cases}$$

$y^*_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.2\left(1 - \dfrac{2(0)}{1}\right) = 1.2,$

$y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}(f(x_0, y_0),\ f(x_1, y^*_1)) = 1 + \dfrac{0.2}{2}\left((1 - \dfrac{2(0)}{1}) + (1.2 - \dfrac{2(0.2)}{1.2})\right) = 1.18$ alors $y_1 = 1.18$

De même on cherche la valeur de $y_2 =$. $y^*_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.18 + 0.2(1.18 - \dfrac{2(0.2)}{1.18}) = 1.34,$
$y_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}(f(x_1, y_1),\ f(x_2, y^*_2)) = 1.18 + \dfrac{0.2}{2}\left((1.18 - \dfrac{2(0.2)}{1.18}) + (1.34 - \dfrac{2(0.4)}{1.34})\right) = 1.33$ alors $y_1 = 1.33$

2). Soit la solution y définie par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, (RK-4):

$$\begin{cases} y_0 = 1, & \text{valeur initiale donnée};\\ k_1 = hf(x_i, y_i), \\ k_2 = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}), \\ k_3 = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_3}{2}), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4\right]. \end{cases}$$

On utilise le tableau suivant pour les calcules:

	k_1	k_2	k_3	k_4	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{k_1}{2}$	$y_i + \frac{k_1}{2}$	$y_i + \frac{k_3}{2}$
$i = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ h = 0.2$	0.2	0.18	0.18	0.20	0.1	1.1	1.09	1.09
$i = 1,\ x_0 = 0.2,\ y_0 = 1.12,\ h = 0.2$	0.15	0.22	0.27	0.77	0.3	1.19	1.71	1.25
$i = 2,\ x_0 = 0.4,\ y_0 = 1.43,\ h = 0.2$								

La comparaison avec les valeurs exactes des y_i:

Si $y = \sqrt{2x+1}$ alors $y_1 = \sqrt{2(0.2)+1} = 1.18$ implique que l'erreur est : $e_1 = 1.18 - 1.12 = 0.06$.

Et $y_2 = \sqrt{2(0.4)+1} = 1.34$ implique que l'erreur est : $e_2 = 1.43 - 1.34 = 0.09$.

. . . .

Bon courage

5.1 Repères biographiques

reference[2]

André-Louis Cholesky Cholesky was a French military officer involved in geodesy and surveying in Crete and North Africa just before World War I. He entered l'École Polytechnique at the age of 20 and was attached to the Geodesic Section of the Geographic Service, in June 1905. That was the period when the revision of the French triangulation had just been decided to be used as the base of a new cadastral triangulation. Cholesky solved the problem of the adjustment of the grid with the method now named after him to compute solutions to the normal equations for the least squares data fitting problem.

- Born : 15 Oct 1875 in Montguyon (Charente-Inférieure).
- Died : 31 Aug 1918.

Figure 5.1: André-Louis Cholesky

Johann Carl Friedrich Gauss Gaussian elimination, which first appeared in the textNine Chapters of the Mathematical Art written in 200 BC, was used by Gauss in his work which studied the orbit of the asteroid Pallas. Using observations of Pallas taken between 1803 and 1809, Gauss obtained a system of six linear equations in six unknowns. Gauss gave a systematic method for solving such equations which is precisely Gaussian elimination on the coefficient matrix.

- Born : 30 April 1777 in Brunswick, Duchy of Brunswick (now Germany).
- Died : 23 Feb 1855 in Göttingen, Hanover (now Germany).

Figure 5.2: Johann Carl Friedrich Gauss

Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange is usually considered to be a French mathematician, but the Italian Encyclopedia refers to him as an Italian mathematician. They certainly have some justification in this claim since Lagrange was born in Turin and baptised in the name of Giuseppe Lodovico Lagrangia.
The papers by Lagrange cover a variety of topics : beautiful results on the calculus of variations, work on the calculus of probabilities $\cdots$ In a work on the foundations of dynamics, Lagrange based his development on the principle of least action and on kinetic energy. The 'Mécanique analytique' which Lagrange had written in Berlin, was published in 1788. It summarized all the work done in the field of mechanics since the time of Newton and is notable for its use of the theory of differential equations. With this work Lagrange transformed mechanics into a branch of mathematical analysis. " Lagrange, in one of the later years of his life, imagined that he had overcome the difficulty (of the parallel axiom). He went so far as to write a paper, which he took with him to the Institute, and began to read it. But in the first paragraph something struck him which he had not observed : he muttered : 'Il faut que jŠy songe encore', and put the paper in his pocket. " A De Morgan Budget of Paradoxes.

- Born : 25 Jan 1736 in Turin, Sardinia-Piedmont (now Italy).

Figure 5.3: Joseph-Louis Lagrange

- Died : 10 April 1813 in Paris, France.

Karl Gustav Jacob Jacobi Jacobi published three treatises on determinants in 1841. These were important in that for the first time the definition of the determinant was made in an algorithmic way and the entries in the determinant were not specified so his results applied equally well to cases were the entries were numbers or to where they were functions. These three papers by Jacobi made the idea of a determinant widely known.

- Born : 10 Dec 1804 in Potsdam, Prussia (now Germany).
- Died : 18 Feb 1851 in Berlin, Germany.

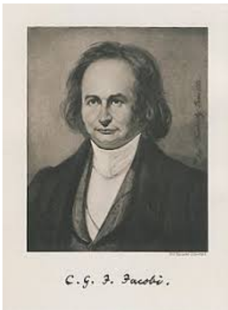

Figure 5.4: Karl Gustav Jacob Jacobi

Ludwig Philipp von Seidel Philipp Seidel entered the University of Berlin in 1840 and studied under Dirichlet and Encke.Hemoved to Koenigsberg where he studied under Bessel, Jacobi and Franz Neumann. Seidel obtained his doctorate from Munich in 1846 and he went on to become professor there. Seidel wrote on dioptics and mathematical analysis. His work on lens identified mathematically five coefficients describing the aberration of a lens, now called 'Seidel sums'. These Seidel sums correspond to spherical aberration, coma, astigmatism, Petzval curvature and distortion. He also introduced the concept of nonuniform convergence and applied probability to astronomy.

- Born : 24 Oct 1821 in Zweibroecken, Germany.
- Died : 13 Aug 1896 in Munich, Germany.

Alston Scott Householder
Householder then taught mathematics in a number of different places. He was awarded a Ph.D. by the University of Chicago in 1947 for a thesis on the calculus of variations. However his interests were moving towards applications of mathematics, particularly applications of mathematics to biology. In 1946, after the end of the war, Householder joined the Mathematics Division of Oak Ridge National Laboratory. Here he changed topic, moving into numerical analysis which was increasing in importance due to the advances in computers. He started publishing on this new topic with Some numerical methods for solving systems of linear equations which appeared in 1950.
In 1964, Householder published one of his most important books : *The theory of matrices in numerical analysis.*

Figure 5.5: Ludwig Philipp von Seidel

- Born : 5 May 1904 in Rockford, Illinois, USA.
- Died : 4 July 1993 in Malibu, California, USA.

Figure 5.6: Alston Scott Householder

Cornelius Lanczos

In 1938 at Purdue, Lanczos published his first work in numerical analysis. Two years later he published a matrix method of calculating Fourier coefficients which, over 25 years later, was recognised as the Fast Fourier Transform algorithm. In 1946, with Boeing, he worked on applications of mathematics to aircraft design and was able to develop new numerical methods to solve the problems. In 1949 he moved to the Institute for Numerical Analysis of the National Bureau of Standards in Los Angeles. Here he worked on developing digital computers and was able to produce versions of the numerical methods he had developed earlier to program on the digital computers.

- Born : 2 Feb 1893 in Székesfehérvr, Hungary.
- Died : 25 June 1974 in Budapest, Hungary.

Figure 5.7: Cornelius Lanczos

Joseph Raphson

Joseph Raphson's life can only be deduced from a number of pointers. It is through the University of Cambridge records that we know that Raphson attended Jesus College Cambridge and graduated with

an M.A. in 1692. Rather remarkably Raphson was made a member of the Royal Society in 1691, the year before he graduated. His election to that Society was on the strength of his book Analysis aequationum universalis which was published in 1690 contained the Newton method for approximating the roots of an equation.
Raphson's ideas of space and philosophy were based on Cabalist ideas. The Cabala was a Jewish mysticism which was influential from the 12th century on and for which several basic doctrines were strong influences on Raphson's philosophical thinking. The doctrines included the withdrawal of the divine light, thereby creating primordial space, the sinking of luminous particles into matter and a cosmic restoration.

- Born : 1648 in Middlesex, England.
- Died : 1715.

Figure 5.8: Joseph Raphson

Carle David Tolmé Runge

As a German mathematician, physicist, and spectroscopist, he is known to be the co-developer and co-eponym of the Runge-Kutta method in the field of numerical analysis. After taking his secondary school teachers examinations he returned to Berlin where he was influenced by Kronecker. Runge then worked on a procedure for the numerical solution of algebraic equations in which the roots were expressed as infinite series of rational functions of the coefficients.

- Born : 30 Aug 1856 in Bremen, Germany.
- Died : 3 Jan 1927 in Göttingen, Germany.

Figure 5.9: Carle David Tolmé Runge

Sir Isaac Newton

Isaac Newton is perhaps the best known renaissance scientist today, living between 1642 and 1727. We think of gravity, celestial mechanics, and calculus when we think of him. He certainly did develop the calculus by building upon the ideas of Fermat and Barrow (the person whose chair he took when he went to Cambridge). But he was not alone in developing calculus. And his focus was really one of mechanics - how do bodies move. His focus was always on motion and is reflected in the terminology he chose for calculus - what we call derivatives, he called *fluxions*. And his integrals were simply inverse *fluxions*. You can see how flux was his focus.
He also developed the dot notation for calculus - one dot meant a first derivative, two dots a second, and

so forth. Today this is used, but only with respect to time derivatives. A general derivative still needs to specify the variable of differentiation and more often than not, time derivatives are done in this more general manner.
As indicated earlier, Newton and his followers argued vehemently with Huygens and his followers over the nature of light. Newton subscribed to a *corpuscular* theory, where he en visioned light as small compact bodies of energy. Huygens focussed on the wave like nature and developed that theory. The diffraction properties of light were so obvious, that Huygens school eventually won out, and the wave theory of light ruled science for the next three centuries.

- Born : 4 Jan 1643 in Woolsthorpe, Lincolnshire, England.
- Died : 31 March 1727 in London, England.

Figure 5.10: Sir Isaac Newton

Leonhard Euler

The publication of many articles and his book Mechanica (1736-37), which extensively presented Newtonian dynamics in the form of mathematical analysis for the first time, started Euler on the way to major mathematical work. He integrated Leibniz's differential calculus and Newton's method of *fluxions* into mathematical analysis. In number theory he stated the prime number theorem and the law of biquadratic reciprocity. Euler made large bounds in modern analytic geometry and trigonometry. He was the most prolific writer of mathematics of all time. His complete works contains 886 books and papers.

- Born : 15 April 1707 in Basel, Switzerland.
- Died : 18 Sept 1783 in St Petersburg, Russia.

Figure 5.11: Leonhard Euler

Martin Wilheim Kutta

Kutta was professor at the RWTH Aachen from 1910 to 1911. He then became professor at Stuttgart and remained there until he retired in 1935. In 1901, he had co-developed the Runge-Kutta method, used to solve ordinary differential equations numerically. He is also remembered for the Zhukovsky-Kutta aerofoil, the Kutta-Joukowski theorem and the Kutta condition in aerodynamics.

- Born : 3 Nov 1867 in Pitschen, Upper Silesia (now Byczyna), Poland.
- Died : 25 Dec 1944 in Frstenfeldbruck, Germany.

Figure 5.12: Martin Wilheim Kutta

Chapter 6

General Bibliography

Bibliography

General Bibliography

[1] B. Mohammadi and J.-H. Saiac. Pratique de la simulation numérique. Dunod / Industries et Technologies, 2003. ISBN 210006407X.

[2] H. Oudin. Méthode des éléments finis. École Centrale de Nantes, France, 2008. http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/17/72/PDF/MEF.pdf.

[3] A. George. Nested dissection of a regular finite-element mesh. SIAM Journal on Numerical Analysis, $10 : 345 - 363$, 1973. doi: 10.1137/0710032.

[4] W. F. Tinney and J. W. Walker. Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization. In Proc. of the IEEE, volume 55, pages $1801 - 1809$, 1967.

[5] Comm. Benoît. Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues - application de la méthode à la résolution d'un système d'équations linéaires (procédé du commandant cholesky). Bulletin Géodésique, $2 : 5 - 77$, 1924.

[6] C. Farhat and D. Rixen. Encyclopedia of Vibration, chapter Linear Algebra, pages $710 - 720$. Academic Press, 2002.

[7] R. Southwell. Relaxation Methods in Theoretical Physics. Clarendaon Press, Oxford, 1946.

[8] C. Lanczos. An iteration method dor the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Journal of research of the National Bureau of Standards, $45 : 225 - 280$, 1950.

[9] D. W. Jordan and P. Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford applied mathematics and computing science series, 1987.

[10] M. Ortiz and J. C. Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, $23(3) : 353 - 366$, 1986. doi: 10.1002/nme.1620230303.

[11] T. J. R. Hughes and T. Belytschko. Nonlinear Finite Element Analysis. Zace sevices Ltd - ICE Division, 1995.

[12] C. W. Gear. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equation. Prentice-Hall, 1971.

[13] K. J. Bathe and E. L Wilson. Stability and accuracy analysis of direct integration method. Earthquake Eng. Struct. Dyn., $1 : 283 - 291$, 1973.

[14] K. C. Park. An improved stiffy stable method for direct integration of non linear structural dynamics equations. Journal of Applied Mechanics, pages $164 - 470$, 1975.

[15] A. C. Aitken. On the iterative solution of a system of linear equations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, $63 : 52 - 60$, 1950.